Prove di Matematica – Ammissione al I Anno del Corso Ordinario

Prerequisiti

Aritmetica:

- Frazioni e rappresentazione decimale.
- Numeri razionali e reali.
- Disuguaglianze.
- Progressioni aritmetiche e geometriche.
- Media aritmetica e geometrica di numeri positivi.
- Divisione con resto.
- Divisibilità, massimo comun divisore, minimo comune multiplo.
- Algoritmo di Euclide per il calcolo del massimo comun divisore.
- Numeri primi e scomposizione di un intero in fattori primi.

Algebra:

- Binomio di Newton e triangolo di Tartaglia.
- Polinomi e operazioni algebriche fra polinomi.
- Divisione con resto tra polinomi. Teorema di Ruffini.
- Teorema di identità dei polinomi. Relazioni fra coefficienti e radici.
- Equazioni di secondo grado. Grafico di un trinomio di secondo grado.
- Potenze, funzioni esponenziali, logaritmiche e trigonometriche e loro rappresentazione grafica.

Geometria:

- Elementi di geometria piana. Incidenza, perpendicolarità, parallelismo.
- Figure e poligoni convessi.
- Trasformazioni geometriche del piano e loro composizione.
- I teoremi di Talete, Euclide e Pitagora.
- Criteri di congruenza e similitudine dei triangoli.
- Punti notevoli di un triangolo.
- Proprietà del cerchio (corde, secanti, tangenti, archi, angoli al centro e alla circonferenza).

- Somma degli angoli interni e degli angoli esterni di un poligono convesso.
- Area dei poligoni e del cerchio.
- Le coniche.
- Poliedri convessi. Poliedri regolari. Formula di Eulero.
- La sfera, il cono, il cilindro.
- Il piano cartesiano. Rappresentazione di rette, cerchi, parabole, ellissi, iperboli.
- Trigonometria.

Teoria degli insiemi:

- Proprietà elementari degli insiemi.
- Relazioni di equivalenza e di ordine.
- Funzioni. Iniettività, surgettività e bigettività.
- Elementi di calcolo combinatorio. Coefficienti binomiali.
- Principio di induzione.
- Cenni di probabilità elementare.

Testi consigliati

I problemi di matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa – Boringhieri

R. Courant, H. Robbins, Che cos'è la matematica? – Zanichelli

Esempi di problemi della prova scritta

- Sia p un numero primo tra 101 e 199, cioè della forma “1ab”, p=100 + 10a + b, con a e b interi tra 0 e 9. Si mostri che allora il polinomio x^2+ax+b non ha radici intere.
- Un papà ha 10 monete dello stesso valore (indistinguibili). In quanti modi le può distribuire tra i suoi tre figli, tenendone eventualmente alcune per se (anche tutte!)?

Esempi di domande alla prova orale

- Si mostri che le tre altezze di un triangolo acutangolo sono le bisettrici del triangolo di vertici i piedi di tali altezze.
- Giocando 4 numeri su una ruota (estrazione di 5 numeri su 90 possibili), si possono fare esattamente 4 ambi?

Prove di Fisica – Ammissione al I Anno del Corso Ordinario

Prerequisiti

- Cinematica; leggi di Newton; meccanica elementare del corpo rigido; principi di conservazione dell'energia, della quantità di moto e del momento angolare; urti; legge della gravitazione universale e leggi di Keplero; oscillatori meccanici.

- Cenni di meccanica dei fluidi, teorema di Bernoulli; fenomeni ondulatori e cenni di acustica.

- Termologia; leggi dei gas; i primi due principi della termodinamica; cicli termodinamici; teoria cinetica dei gas.

- Ottica geometrica: riflessione e rifrazione della luce; proprietà ondulatorie della luce: interferenza e diffrazione.

- Elettrostatica; correnti elettriche; magnetostatica; induzione.

- Elettromagnetica; circuiti oscillanti e onde elettromagnetiche.

Esempi di problemi della prova scritta

- Un cacciatore vuole sparare col suo fucile a una scimmia aggrappata sul ramo di un albero. Il cacciatore sa però che appena la scimmia sentirà il colpo di fucile si lascerà cadere dal ramo. Si determini dove deve mirare il cacciatore per essere sicuro di colpire la scimmia

- Recentemente sono stati ritrovati alcuni lavori non pubblicati del Barone di Munchausen. In uno di questi i suoi calcoli indicano che l’energia del sole sarà un giorno esaurita, causando il congelamento della Terra e dei suoi abitanti. Per ovviare a questa fine inevitabile egli propose di costruire un grande pallone rigido vuoto da ogni gas di 1km di raggio e attaccarlo alla terra tramite un lungo e leggero cavo molto resistente. La terra sarebbe così spinta attraverso lo spazio verso la stella più vicina dalla forza di Archimede trasmessa tramite la corda alla terra. Si stimi la forza sulla corda assumendo che il pallone abbia massa nulla. Si discuta la realizzabilità dell’idea del Barone.

Esempi di domande alla prova orale

- Nel circuito refrigerante di un motore a scoppio la pressione p è maggiore di quella atmosferica. Se T_0 è la temperatura di ebollizione, una volta spento il motore, che succede a pressione e temperatura di ebollizione dopo che si è aperto il tappo del liquido refrigerante?

- Sia g’ l’accelerazione gravitazionale determinata nel centro della luna dal campo gravitazionale terrestre. Date M e m le masse della Terra e della Luna, si determini l’accelerazione determinata dal campo gravitazionale della Luna nel centro della Terra.

Scuola Superiore Meridionale
Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2021–2022

Prova di Matematica

(Corsi di Laurea in Fisica e Ingegneria e Matematica)

7 Settembre 2021

Non è consentita la consultazione di alcun libro o documento, né l'uso di alcun dispositivo, come per esempio, calcolatrici, cellulari né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, compreso il presente testo, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare la firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
La prova potrà essere consegnata solo dopo almeno un'ora dall'inizio della stessa.

Tempo disponibile: 4 ore

Problema 1. Gli spigoli di un tetraedro sono numerati da 1 a 6. Ad ogni vertice si associa la somma dei numeri sui tre spigoli che vi concorrono. Si dimostri che i numeri sui vertici non possono essere tutti uguali.

Problema 2. Si dimostri che non esiste un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi tale che $p(1) = 0$ e $p(3) = 3$.

Problema 3. Un triangolo ABC ha i lati che misurano 3, 4 e 5. Si formi un secondo triangolo $A'B'C'$ i cui lati hanno le stesse misure delle mediane del primo triangolo. Si calcoli l'area del secondo triangolo.
Si dimostri che l'area di $A'B'C'$ è sempre tre quarti dell'area di ABC, qualunque siano le lunghezze dei suoi lati.

Problema 4. Un dado ha 6 facce. Su una c'è scritto "HAI VINTO", su due "RITIRA", sulle altre tre "PASSA IL DADO". Si gioca in due.
Qual è la probabilità che il primo giocatore vinca entro tre tiri (in generale, indipendentemente da chi li esegue nella partita)?

Problema 5. Si trovino tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 6. Si mostri che l'equazione

$$n(n + 1) = 4m(m + 1)$$

non ha soluzioni in interi positivi n, m.

Scuola Superiore Meridionale
Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2021–2022

Prova di Matematica – Soluzioni

Problema 1. Gli spigoli di un tetraedro sono numerati da 1 a 6. Ad ogni vertice si associa la somma dei numeri sui tre spigoli che vi concorrono. Si dimostri che i numeri sui vertici non possono essere tutti uguali.

Soluzione. Ogni spigolo contribuisce alla somma dei due suoi vertici adiacenti. Dunque la somma totale dei numeri associati ai vertici è due volte la somma di tutti i numeri sugli spigoli, che è la somma da 1 a 6, dunque 21. La somma totale di cui sopra è allora 42, ma essendo 4 i vertici e 42 non divisibile per 4, i numeri sui vertici non possono essere tutti uguali. tutti uguali.

Problema 2. Si dimostri che non esiste un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi tale che $p(1) = 0$ e $p(3) = 3$.

Soluzione. Supponiamo esista tale polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

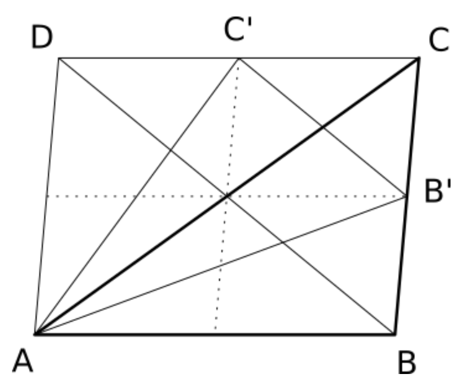
con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Se $p(1) = 0$ e $p(3) = 3$, si ha

$$3 = p(3) - p(1) = a_n(3^n - 1) + a_{n-1}(3^{n-1} - 1) + \cdots + a_1(3 - 1)$$

ma tutti i numeri $3^k - 1$ sono pari, per $k = 1, \ldots, n$, dunque $p(3) - p(1)$ è pari, quindi non può essere uguale a 3, da cui la contraddizione.

Problema 3. Un triangolo ABC ha i lati che misurano 3, 4 e 5. Si formi un secondo triangolo $A'B'C'$ i cui lati hanno le stesse misure delle mediane del primo triangolo. Si calcoli l'area del secondo triangolo.
Si dimostri che l'area di $A'B'C'$ è sempre tre quarti dell'area di ABC, qualunque siano le lunghezze dei suoi lati.

Soluzione. Dimostriamo prima il secondo punto. A partire da un generico triangolo ABC costruiamo il parallelogramma $ABCD$ come nella figura seguente.



Individuati B' e C' rispettivamente punti medi dei segmenti BC e CD, si vede allora facilmente che il triangolo $AB'C'$ ha i lati di lunghezza uguale alle mediane del triangolo ABC. L'area di tale triangolo si ottiene sottraendo dall'area del parallelogramma $ABCD$, che è doppia dell'area di ABC, le aree dei triangoli BCC', ABB' e ADC'. Essendo l'area di BCC' uguale a $\frac{1}{8}Area(ABCD) = \frac{1}{4}Area(ABC)$ e le aree di ABB' e ADC' uguali a $\frac{1}{2}Area(ABC)$, concludiamo

$$\begin{aligned} Area(AB'C') &= Area(ABCD) - Area(BCC') - Area(ABB') - Area(ADC') \\ &= 2Area(ABC) - \frac{1}{4}Area(ABC) - \frac{1}{2}Area(ABC) - \frac{1}{2}Area(ABC) \\ &= \frac{3}{4}Area(ABC) \end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare.
Segue dunque immediatamente che la risposta al primo punto è 9/2.

Problema 4. Un dado ha 6 facce. Su una c'è scritto "HAI VINTO", su due "RITIRA", sulle altre tre "PASSA IL DADO". Si gioca in due.
Qual è la probabilità che il primo giocatore vinca entro tre tiri (in generale, indipendentemente da chi li esegue nella partita)?

Soluzione. Il primo giocatore vince, con probabilità 1/6 se al primo tiro esce "HAI VINTO", oppure, se dopo aver ottenuto "RITIRA", con probabilità 1/3, esce "HAI VINTO", sequenza quindi con probabilità $1/3 \cdot 1/6$, oppure se riottiene "RITIRA" e poi vince, con probabilità $1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/6$. Infine, vince anche se esce al primo tiro "PASSA IL DADO", al secondo giocatore lo stesso "PASSA IL DADO" e di nuovo al primo "HAI VINTO", con probabilità $1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/6$.
La somma delle probabilità di tutte queste sequenze di al massimo tre tiri, vincenti per il primo giocatore è

$$1/6 + 1/3 \cdot 1/6 + 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1/6 + 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/6 = 61/216$$

che è dunque la probabilità cercata.

Problema 5. Si trovino tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Ponendo $y = 0$ nell'equazione si ha

$$f(0)f(x) = f(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Notando che la funzione f identicamente nulla non soddisfa l'equazione, deve esistere $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tale che $f(\overline{x}) \neq 0$, dunque segue che $f(0) = 1$, dividendo per $f(\overline{x})$.
Ponendo $y = -x$ si ottiene

$$f(x)f(-x) = f(0) - x^2 = 1 - x^2$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi $f(1)f(-1) = 0$ (scegliendo $x = 1$), cioè $f(1) = 0$ oppure $f(-1) = 0$.
Se $f(1) = 0$, ponendo $y = 1$ nell'equazione si ha

$$0 = f(x)f(1) = f(x+1) + x$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e con la sostituzione $x = z - 1$, si conclude che $f(z) = 1 - z$, per ogni $z \in \mathbb{R}$, funzione che soddisfa l'equazione iniziale.
Se invece $f(-1) = 0$, ponendo $y = -1$ si ha

$$0 = f(x)f(-1) = f(x-1) - x$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e con la sostituzione $x = z + 1$, si conclude che $f(z) = 1 + z$, per ogni $z \in \mathbb{R}$, altra funzione che anch'essa soddisfa l'equazione.
In conclusione, le uniche due funzioni cercate sono allora $f(x) = 1 + x$ e $f(x) = 1 - x$.

Problema 6. Si mostri che l'equazione

$$n(n+1) = 4m(m+1)$$

non ha soluzioni in interi positivi n, m.
Soluzione. Sommando 1 ad entrambi i membri dell'equazione, si ottiene

$$n^2 + n + 1 = 4m^2 + 4m + 1 = (2m+1)^2 .$$

Notando che

$$n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

concludiamo che

$$n^2 < (2m+1)^2 < (n+1)^2$$

da cui deve valere

$$n < 2m + 1 < n + 1 .$$

Segue che n ed m non possono essere entrambi numeri naturali, in quanto tra n e $n+1$ non può esserci un numero naturale $2m+1$ (sono consecutivi).

Scuola Superiore Meridionale
Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2021–2022

Prova di Fisica

(Corsi di Laurea in Matematica, Fisica e Ingegneria)

8 Settembre 2021

Non è consentito l'uso o la consultazione di alcun libro, documento, calcolatrice, cellulare né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, compreso il presente testo, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare la firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
L'aula della prova potrà essere abbandonata solo dopo un'ora dall'inizio della stessa.

Tempo disponibile: 4 ore

Problema 1. Un piano è inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale verso il basso. Un proiettile è sparato con velocità v a un angolo θ sopra l'orizzontale come mostrato in Figura 1. Qual è la distanza d lungo il piano inclinato, dal punto di lancio, percorsa dal proiettile? Per quale angolo θ is ottiene la distanza massima?

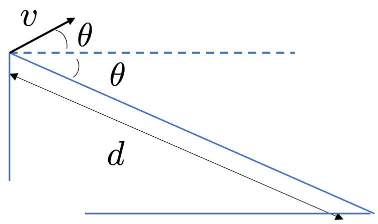


Figura 1

Problema 2. Un ragazzo che pratica bungee jumping si lascia cadere verticalmente con velocità iniziale nulla da un ponte attaccato a una corda elastica di cui una estremità è fissata al ponte. Sotto al ponte c'è un lago. Sapendo che il ragazzo non arriverà a toccare l'acqua, data m la sua massa, L la lunghezza a riposo dell'elastico e k la sua costante elastica si calcoli:

- la distanza verticale percorsa dal ragazzo prima di raggiungere una velocità nulla per effetto della forza di richiamo elastica e il tempo impiegato a percorrerla.
- La velocità massima raggiunta durante la caduta.

Problema 3. Si studi il sistema fisico in Figura 2. Si assumano le masse m_1 e m_2 puntiformi e fissate alla leva di massa trascurabile. Le estremità della leva con fulcro O sono connesse con due molle di costante elastica k_1 e k_2 e lunghezza a riposo nulla. Il sistema è immerso nel campo gravitazionale terrestre.

- Trovare, se esiste, l'angolo θ di equilibrio nel caso semplificato in cui $l_1 = l_2 = h$.
- Si studi il caso generale con l_1, l_2 e h generici.

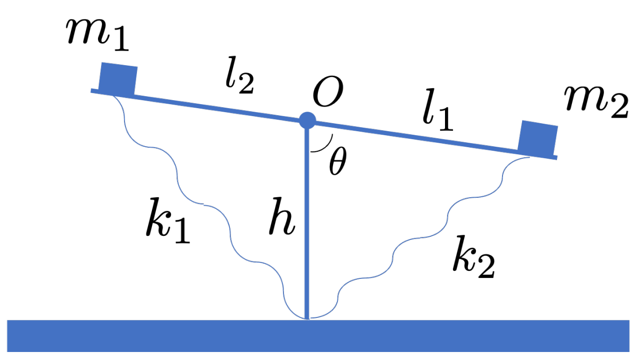


Figura 2

Problema 4. Un circuito a forma di tetraedro è composto di resistenze identiche di $1\,\Omega$ su ogni lato come in Figura 3. Qual è la resistenza che si misurerebbe tra i due punti A e B sul circuito? Come cambia la resistenza misurata se sostituiamo la resistenza posta sul lato AB con una resistenza di $2\,\Omega$?

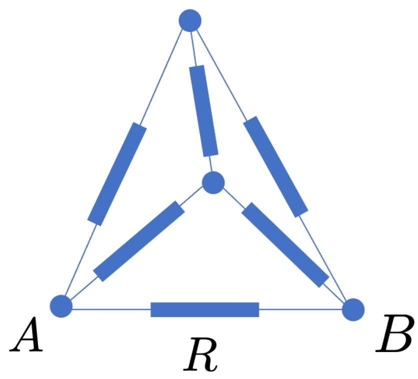


FIGURA 3

Problema 5. Due cariche positive di carica q_1 e q_2 sono poste a distanza L l'una dall'altra nel vuoto. È possibile posizionare una terza carica Q in modo tale che il sistema sia all'equilibrio? Dimostrare che non è possibile oppure trovare il valore di Q e la posizione in cui deve essere posta.

Problema 6. Si consideri una bacinella piena d'acqua con un buco circolare di raggio r sul fondo. Il buco è tappato da un tappo di forma conica, con base di raggio R e altezza H. Il tappo è composto di un materiale con densità relativa rispetto all'acqua $\rho < 1$.
Il tappo però non aderisce perfettamente con il bordo del buco, lasciando scorrere lentamente un po' d'acqua e facendone lentamente abbassare il livello:

(1) Mostrare che se h è sufficientemente grande il tappo rimarrà sul fondo della bacinella per qualunque valore di $\rho \in (0, 1)$.
(2) Si determini se raggiunto un certo livello h dell'acqua il tappo inizierà a sollevarsi.
(3) È vero o no che se il tappo inizierà a solleversi questo accadrà quando è ancora completamente sommerso?

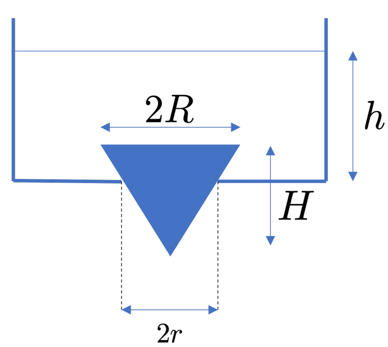


FIGURA 4

Soluzioni

Problema 1.
È sufficiente considerare l'intersezione tra la retta che descrive il piano inclunato e la traiettoria del proiettile. Ponendo l'origine del sistema di riferimento nel punto in cui viene lanciato il proiettile abbiamo per il proiettile

$$y(t) = v\sin\theta\ t - \frac{1}{2}gt^2\,, \tag{1}$$

$$x(t) = v\cos\theta\ t\,, \tag{2}$$

e per il piano

$$y = -\tan\theta\ x\,. \tag{3}$$

Eliminando il tempo e risolvendo il sistema otteniamo la soluzione

$$(x, y) = \left(\frac{4v^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{g}, -\frac{4v^2\sin^2(\theta)}{g}\right)\,, \tag{4}$$

da cui

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4v^2\sin(\theta)}{g}\,. \tag{5}$$

Il valore massimo di d si ottiene per $\theta = \pi/2$ che però è un caso limite in cui il proiettile tocca il piano nel punto da cui è partito e $d = 0$. Il massimo pertanto non è realizzato per nessun dato angolo $\theta \in (0, \pi/2]$. Il problema diventa più realistico se il proiettile ha una dimensione finita. In questo caso l'angolo per cui si ottiene la distanza massima esiste. Si lasciano i dettagli ai lettori interessati.

Problema 2.
Per calcolare la distanza verticale percorsa è sufficiente usare la conservazione dell'energia:

$$mgh = \frac{1}{2}k(h - L)^2\,. \tag{6}$$

Risolvendo l'equazione e considerando solo la soluzione $h > 0$ abbiamo:

$$h = L + \frac{gm}{k} + \frac{gm}{k}\sqrt{1 + \frac{2kL}{gm}}\,. \tag{7}$$

Per calcolare il tempo di percorrenza va osservato che il moto si compone di due componenti. Prima un moto uniformemente accelerato fino a percorrere la distanza verticale L e poi un moto armonico. Detto $T = T_1 + T_2$, si ha subito $T_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$. Per quanto riguarda il moto armonico abbiamo che il secondo principio di Newton ci da un'accelerazione *verso il basso*

$$a = g - \frac{k}{m}(h - L)\,, \qquad\qquad h > L\,. \tag{8}$$

Il termine costante produce semplicemente uno spostamento del punto di equilibrio. Il moto armonico è pertanto descritto da:

$$h(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) + L + \frac{gm}{k}\,, \tag{9}$$

$$v(t) = -\omega\, c_1\sin(\omega t) + \omega\, c_2\cos(\omega t)\,, \tag{10}$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Ponendo $t = 0$ quando nel momento in cui la molla inizia a tendersi possiamo imporre che $h(0) = L$ e che $v(0) = \sqrt{2Lg}$. Questo permette di determinare i coefficienti c_1 e c_2 come

$$c_1 = -\frac{gm}{k}\,, \qquad c_2 = \sqrt{\frac{2Lgm}{k}}\,. \tag{11}$$

A questo punto possiamo determinare T_2 risolvendo l'equazione:

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\,g\sin(\omega T_2) + \sqrt{2Lg}\cos(\omega T_2) = 0\,, \tag{12}$$

da cui

$$\tan\omega T_2 = -\sqrt{\frac{2Lk}{mg}} \to T_2 = \sqrt{\frac{m}{k}}\left[-\arctan\sqrt{\frac{2Lk}{mg}} + \pi\right]\,, \tag{13}$$

dove abbiamo scelto la prima soluzione $T_2 > 0$. Combinando i risultati otteniamo la soluzione

$$T = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}}\left[\arctan\sqrt{\frac{2Lk}{mg}} - \pi\right]\,. \tag{14}$$

Per quanto riguarda l'ultimo punto la velocità massima raggiunta si ottiene quando la forza elastica bilancia completamente la forza peso e pertanto subito dopo la forza totale cambia segno e frena la caduta, ossia

$$h(t) = \frac{gm}{k} + L\,. \tag{15}$$

Da qui possiamo trovare la relazione:

$$\tan(\omega t) = \sqrt{\frac{gm}{2kL}} \tag{16}$$

da cui sostituendo seni e coseni in (10) si ottiene

$$v_{\max} = \sqrt{2Lg}\sqrt{1 + \frac{gm}{2kL}}\,. \tag{17}$$

Problema 3.

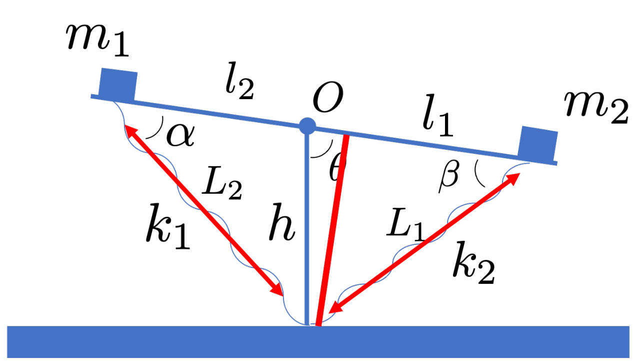


FIGURA 5

Risolviamo direttamente il caso generale. Per trovare la posizione di equilibrio, se esiste, dobbiamo studiare il momento delle forze che agiscono sulla leva e imporre che sia nullo. Con riferimento alla figura 5 abbiamo da semplici considerazioni geometriche:

$$L_1 = \sqrt{h^2 - 2hl_1 \cos\theta + l_1^2}\,, \tag{18}$$

$$L_2 = \sqrt{h^2 - 2hl_2 \cos\theta + l_2^2}\,. \tag{19}$$

Per calcolare i momenti delle forze elastiche dobbiamo calcolare inoltre

$$\sin\beta = \frac{h\sin\theta}{\sqrt{h^2 - 2hl_1\cos\theta + l_1^2}}\,, \tag{20}$$

$$\sin\alpha = \frac{h\sin\theta}{\sqrt{h^2 - 2hl_2\cos\theta + l_2^2}}\,. \tag{21}$$

La condizione di momento totale $\sum_i r_i \times F_i = 0$ nullo diventa allora

$$(m_1 g \sin\theta + L_2 k_1 \sin\alpha) l_2 = (m_2 g \sin\theta + L_1 k_2 \sin\beta) l_1\,, \tag{22}$$

che semplificando diventa

$$l_2 \sin\theta (g m_1 + h k_1) = l_1 \sin\theta (g m_2 + h k_2)\,, \tag{23}$$

Tale equazione ammette come soluzioni $\theta = 0, \pi$ e

$$\theta \in (0, \pi)\,, \tag{24}$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{hk_2 + gm_2}{hk_1 + gm_1}\,. \tag{25}$$

In quest'ultimo caso ogni angolo θ è un angolo di equilibrio se vale una relazione (25) e non solo $\theta = 0, \pi$. Il caso $l_1 = l_2 = h$ è simile (calcoli più semplici) e la relazione (25) semplifica in

$$\frac{hk_2 + gm_2}{hk_1 + gm_1} = 1\,. \tag{26}$$

Problema 4.

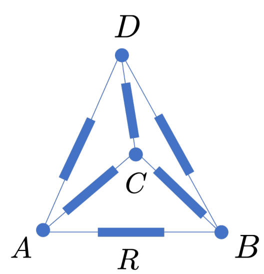


Figura 6

Con riferimento alla figura 6 possiamo subito affermare che i punti C e D sono allo stesso potenziale. Ne segue che il circuito è equivalente al circuito in figura 7. A questo punto è banale calcolare la resistenza equivalente usando le leggi di Kirchhoff ottenendo $R_{\text{eq}} = \frac{1}{2}\,\Omega$.

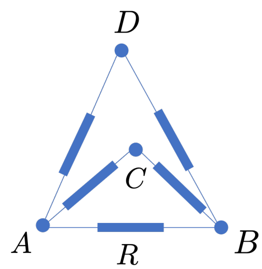


Figura 7

Nel caso in cui la resistenza tra A e B è sostituita con una resistenza di 2 Ω la resistenza misurata ai capi AB risulterà $R_{\text{eq}} = \frac{2}{3}\ \Omega$.

Problema 5.
È ovvio che la carica Q ha qualche chance di rendere il sistema stabile solo se posta sulla congiungente tra q_1 e q_2. Inoltre è facile concludere che la carica Q va posta all'interno del segmento delimitato dalle cariche q_1 e q_2 e non all'esterno. Supponiamo infatti per assurdo che la carica Q sia posta in modo tale che la carica q_1 separi la carica Q e la carica q_2. in questo caso la carica q_1 subisce due forze concordi che pertanto non possono mai annullarsi. Questo dimostra che la carica Q deve separare le due carice q_1 e q_2 e deve essere di segno discorde.
Con la premessa di cui sopra la stabilità del sistema equivale all'annullarsi delle tre forze agenti su ogni carica. Se poniamo senza perdita di generalità la carica q_1 nell'origine e la carica q_2 a distanza L sull'asse delle x possiamo scrivere:

$$\frac{Qq_1}{x^2} - \frac{q_1q_2}{L^2} = 0\,, \tag{27}$$

$$\frac{q_1q_2}{L^2} - \frac{Qq_2}{(L-x)^2} = 0\,, \tag{28}$$

$$\frac{Qq_2}{(L-x)^2} - \frac{Qq_1}{x^2} = 0\,. \tag{29}$$

Queste sono tre equazioni in due incognite che hanno un'unica soluzione accettabile (all'interno del segmeento $x \in (0, L)$:

$$x = \frac{L\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}\,, \qquad Q = \frac{q_1q_2}{\left(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}\right)^2}\,. \tag{30}$$

Problema 6.

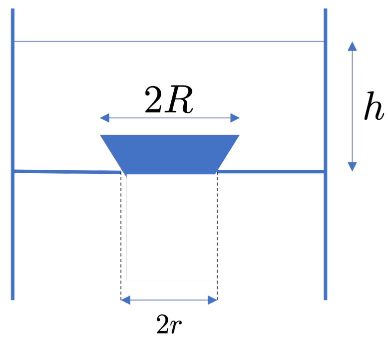


FIGURA 8

Si confronti il caso in esame con il caso in cui al di sotto del tappo c'è acqua fig. 8 e il tappo è formato solo dal tronco di cono al di sopra del foro. Nel caso in cui il tappo sia completamente circondato d'acqua la forza che agisce sul tappo è data dalla risultante della forza di Archimede e della forza peso. Nel nostro caso però sulla faccia che è appoggiata al buco non aggisce la pressione dell'acqua sottostante e pertanto dobbiamo sottrarre alla forza di Archimede la forza sul tappo prodotta dall'acqua che sarebbe al di sotto del tappo. Abbiamo pertanto che

$$F = -mg + g\rho_{acqua} V_i - \rho_{acqua} g h S_i \tag{31}$$

dove $V_i = \frac{\pi H\left(R^3 - r^3\right)}{3R}$ è il volume di tappo immerso, $S_i = \pi r^2$ è la superfice del foro che non è in contatto con l'acqua, $m = \rho\, \rho_{acqua} \frac{1}{3}\pi H R^2$ è la massa del tappo e abbiamo usato nell'ultimo termine la legge di Stevino per calcolare la forza che l'acqua al di sotto del tappo produrrebbe sul tappo stesso.
Si vede pertanto che esiste un contributo negativo verso il basso alla forza lineare in h che pertanto spingerà il tappo verso il basso per qualunque valore della densità relativa $\rho < 1$ (se h è sufficientemente grande).
Il tappo inizierà ad alzarsi solo quando $F = 0$, ossia per

$$h = \frac{H\left((1-\rho)R^3 - r^3\right)}{3r^2 R}\,. \tag{32}$$

Si noti che il tappo si alzerà in questo caso solo se $h > 0$ che implica:

$$\rho \leq 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\,. \tag{33}$$

Se tale condizione non è soddisfatta il livello dell'acqua può scendere al di sotto del tappo. Per determinare se il tappo potrà alzarsi in questo caso dobbiamo tenere in considerazione che la spinta di archimede sarà data solo dal volume immerso fig. 9:

$$V_i = \frac{\pi R^2\left(h + \frac{Hr}{R}\right)^3}{3H^2} - \frac{\pi H r^3}{3R}\,. \tag{34}$$

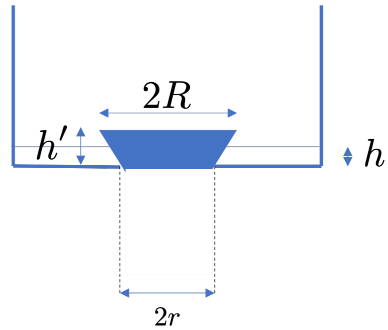


FIGURA 9

Detto questo si conclude facilmente che se il tappo non si alza quando l'acqua arriva al livello della sua base non si alzerà mai visto che la derivata della forza rispetto a h in questo caso è

$$\frac{dF}{dh} = \frac{\pi h R(hR + 2Hr)}{H^2} > 0\,. \tag{35}$$

Pertanto la forza verso l'alto puó solo decrescere rispetto al valore massimo che si ottiene per $h = h'$.

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2022–2023

Prova di Matematica

(Corsi di Laurea in Fisica, Ingegneria e Matematica)

8 Settembre 2022

Non è consentita la consultazione di alcun libro o documento, né l'uso di alcun dispositivo, come per esempio, calcolatrici, cellulari, né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, compreso il presente testo, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare un nome, una firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
La prova potrà essere consegnata solo dopo almeno un'ora dall'inizio della stessa.

Tempo disponibile: 4 ore

Problema 1. Sia n un numero naturale dispari. Consideriano una griglia quadrata fatta di n^2 quadratini unitari e coloriamo ogni lato dei quadratini di rosso o di blu. Se ci sono al massimo n^2 lati rossi in totale, si mostri che allora esiste sempre almeno un quadratino con almeno 3 lati blu.

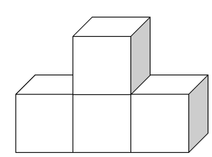
Problema 2. Siano A, B due punti di una parabola di fuoco F e sia S l'intersezione delle due tangenti alla parabola per tali punti. Si mostri che i triangoli ASF e BSF sono simili.

Problema 3. Una sequenza $a_1, a_2, \ldots$ di numeri reali positivi soddisfa

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

per ogni intero positivo k. Si provi che $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$, per ogni $n \geq 2$.

Problema 4. Quattro cubi identici vengono incollati in modo da far combaciare perfettamente le loro facce. Ad ogni passo si sceglie la faccia di un cubo e la si incolla a una faccia di un altro cubo. Se le facce da incollare vengono scelte in maniera equiprobabile, con quale probabilità si ottiene una struttura finale come nella figura a lato?



Problema 5. Si trovino, se ne esistono, tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f\left(f(x) + y\right) = 2x + f\left(f(y) - x\right)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 6. Si trovino, se ne esistono, tutti gli interi positivi a, b e numeri primi p tali che

$$a^3 - b^3 = 4p^2$$

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2022–2023

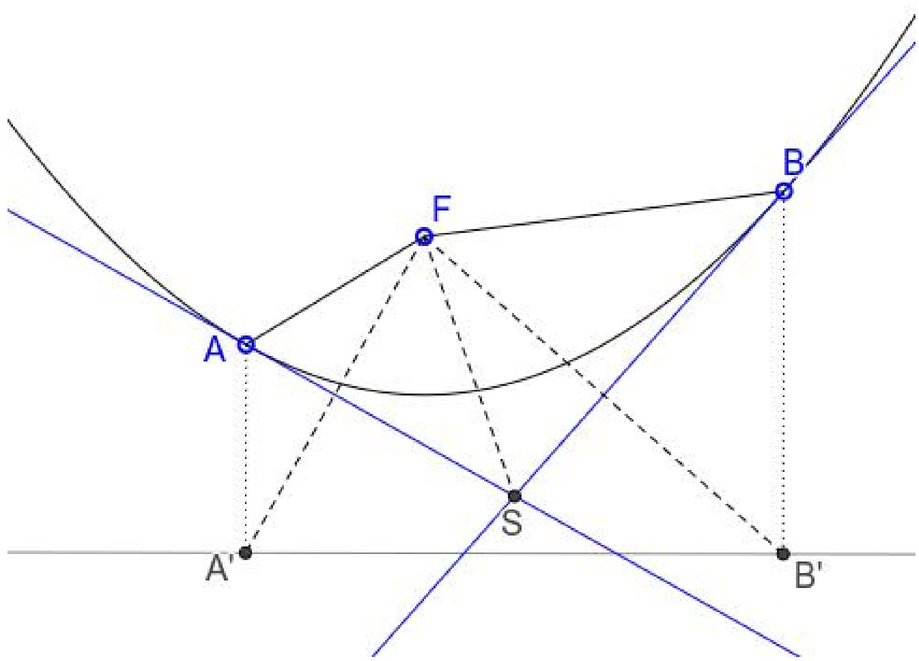
Prova di Matematica – Soluzioni

Problema 1. Sia n un numero naturale dispari. Consideriamo una griglia quadrata fatta di n^2 quadratini unitari e coloriamo ogni lato dei quadratini di rosso o di blu. Se ci sono al massimo n^2 lati rossi in totale, si mostri che allora esiste sempre almeno un quadratino con almeno 3 lati blu.

Soluzione. Colorando alternativamente i quadratini della griglia di bianco e nero, come una scacchiera, in modo che i 4 quadrati d'angolo siano neri, vediamo che si ottengono $(n^2+1)/2$ quadratini neri e $(n^2-1)/2$ bianchi. Se ognuno dei quadratini neri ha al massimo 2 lati blu, segue che ha almeno 2 lati rossi. Contando dunque tutti tali lati rossi, ne abbiamo almeno $2 \times (n^2+1)/2 = n^2+1$, in contraddizione con l'ipotesi che ci siano al massimo n^2 lati rossi in totale nella griglia.

Problema 2. Si considerino due punti A, B su una parabola di fuoco F e sia S l'intersezione delle due tangenti per tali punti. Si mostri che i triangoli ASF e BSF sono simili.

Soluzione. Tracciamo la direttrice della parabola e le proiezioni ortogonali A', B' su di essa dei punti A e B, come nella figura seguente, ricordando la proprietà che ogni punto della parabola ha la stessa distanza da direttrice e fuoco.



Per la proprietà di "riflessione" della parabola, che i raggi paralleli al suo asse si riflettono nel fuoco, si vede facilmente che la tangente in A è bisettrice dell'angolo $\widehat{FAA'}$ ed essendo $AF = AA'$, segue che è perpendicolare al segmento FA'. Da ciò otteniamo che $FS = SA'$ e ripetendo lo stesso argomento per il punto B, anche $FS = SB'$, cioè i punti F, A' e B' stanno su un cerchio di centro S.
L'angolo al centro $\widehat{FSA'}$ di tale cerchio è allora il doppio dell'angolo alla circonferenza $\widehat{FB'A'}$, dunque gli angoli $\widehat{FSA}$ e $\widehat{FB'A'}$ sono uguali. Poiché anche gli angoli $\widehat{FAS}$ e $\widehat{FA'B'}$ sono uguali, essendo complementari rispettivamente degli angoli uguali $\widehat{AFA'}$ e $\widehat{AA'F}$, segue che i triangoli ASF e $A'B'F$ sono simili.
Ripetendo lo stesso argomento, si ottiene che anche il triangolo BSF è simile a $A'B'F$, dunque la tesi è provata.

Segnaliamo che è possibile ottenere una soluzione del problema anche con i metodi della geometria analitica, rappresentando una generica parabola come il grafico nel piano cartesiano della funzione $y = ax^2$, per $a \in \mathbb{R}$. Scelti i punti A e B, si calcolano le coordinate degli altri vertici dei due triangoli ASF e BSF e si vede poi che sono simili.

Problema 3. Una sequenza $a_1, a_2, \ldots$ di numeri reali positivi soddisfa

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

per ogni intero positivo k. Si provi che $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$, per ogni $n \geq 2$.
Soluzione. Prendendo l'inverso della formula e moltiplicando entrambi i membri per k, otteniamo

$$\frac{k}{a_{k+1}} \leq \frac{a_k^2 + (k-1)}{a_k} = a_k + \frac{k-1}{a_k} \qquad \text{cioè} \qquad \frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k} \leq a_k$$

dunque, sommando per k da 1 a n, si ottiene la disuguaglianza

$$\frac{n}{a_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k} \Big) \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$$

Dimostriamo ora la tesi per induzione con caso base $n = 2$, in cui si ha

$$a_1 + a_2 \geq a_1 + \frac{1}{a_1}$$

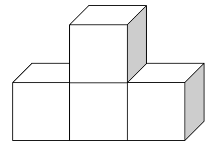
che è ben noto essere sempre maggiore o uguale di 2, qualunque sia $a_1 > 0$ (per esempio usando la disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica.
Se ora supponiamo che $S_n \geq n$, abbiamo due casi:

(1) se $a_{n+1} \geq 1$, ovviamente $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n + 1 \geq n + 1$ e la tesi è dimostrata.
(2) se $a_{n+1} < 1$, abbiamo, per la disuguaglianza di cui sopra,

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq \frac{n}{a_{n+1}} + a_{n+1} = \frac{n-1}{a_{n+1}} + \Big(\frac{1}{a_{n+1}} + a_{n+1} \Big) > n - 1 + 2 = n + 1$$

essendo il termine tra le parentesi maggiore o uguale di 2, per lo stesso argomento del caso $n = 2$.

Avendo mostrato il passo induttivo, la tesi segue allora per ogni $n \geq 2$.



Problema 4. Quattro cubi identici vengono incollati in modo da far combaciare perfettamente le loro facce. Ad ogni passo si sceglie la faccia di un cubo e la si incolla a una faccia di un altro cubo. Se le facce da incollare vengono scelte in maniera equiprobabile, con quale probabilità si ottiene una struttura finale come nella figura a lato?

Soluzione. Dopo il primo passo si hanno ovviamente solo due cubi incollati, con 10 facce tra cui scegliere dove incollare il terzo cubo. Dunque, al secondo passo si hanno due possibilità per la struttura che si ottiene:

(1) una pila di tre cubi in linea, con probabilità $2/10$,

(2) una struttura ad angolo retto, con probabilità $8/10$.

In entrambi i casi, rimangono 14 facce disponibili su cui si può incollare il quarto cubo.
All'ultimo passo, nel primo caso si otterrà la struttura della figura soltanto se si incolla il quarto cubo ad una faccia "centrale" della pila, cioè solo su 4 facce delle 14 disponibili, dunque con probabilità $4/14$. Nel secondo caso, si ottiene la struttura in figura se e solo se l'incollamento avviene su una delle due facce "esterne" del cubo centrale della struttura ad angolo, cioè con probabilità $2/14$.
Concludiamo quindi che la risposta alla domanda è allora $2/10 \times 4/14 + 8/10 \times 2/14 = 6/35$.

Problema 5. Si trovino, se ne esistono, tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che
$$f\left(f(x) + y\right) = 2x + f\left(f(y) - x\right)$$
per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Ponendo $y = -f(x)$, si ha
$$f(0) = 2x + f(f(-f(x)) - x)) \qquad \text{dunque} \qquad f(0) - 2x = f(f(-f(x)) - x)$$
e notando che la funzione $f(0) - 2x$ è surgettiva, segue che anche f è surgettiva.
Esiste allora $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(c) = 0$ e ponendo $x = c$, si ha
$$f(y) = 2c + f(f(y) - c)$$
per ogni $y \in \mathbb{R}$. Poiché $f(y)$ può essere un qualunque numero reale r (sempre per la surgettività di f), concludiamo che $r = 2c + f(r - c)$, per ogni $r \in \mathbb{R}$, da cui $f(r - c) = r - 2c$. Ponendo infine $s = r - c$, abbiamo allora $f(s) = s - c$ per ogni numero reale s. Viceversa, si vede che tutte le funzioni di questo tipo, fissata una qualunque costante $c \in \mathbb{R}$, soddisfano l'equazione del problema. Sono dunque tutte e sole le soluzioni.

Problema 6. Si trovino, se ne esistono, tutti gli interi positivi a, b e numeri primi p tali che
$$a^3 - b^3 = 4p^2$$

Soluzione. Sia ha ovviamente
$$4p^2 = a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
inoltre notiamo che a, b, che sono entrambi maggiori o uguali a 1, hanno la stessa parità, cioè sono o entrambi pari o entrambi dispari. Se fossero entrambi pari, si vede facilmente che $a^3 - b^3$ è divisibile per 8, dunque lo stesso vale per $4p^2$, da cui segue che $p = 2$. In tale caso $p = 2$, si ha allora $a^3 - b^3 = 16$, ma se a, b sono entrambi pari, si ha $b \geq 2$ e $a \geq 4$ e

ovviamente $a-b \geq 2$, dunque $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \geq 2 \times (16+8+4)=56 \neq 16$, mentre se sono entrambi dispari, dalla fattorizzazione sopra segue che $a^3-b^3=16$ avrebbe un fattore dispari a^2+ab+b^2, il che è impossibile.
Vediamo dunque il caso p primo dispari, in cui chiaramente $4p^2$ non è divisibile per 8, dunque (per quanto detto sopra) a e b sono entrambi dispari, cioè $a=2k+1$ e $b=2h+1$, con $k>h$. Segue, sostituendo,

$$4p^2=2(k-h)(4k^2+4k+1+4hk+2h+2k+1+4h^2+4h+1)=2(k-h)(4k^2+4h^2+4hk+6k+6h+3)$$

da cui si vede che, essendo l'ultimo fattore dispari, maggiore di 1 e p primo, abbiamo solo due casi possibili:

(1) $2(k-h)=4p$ e $4k^2+4h^2+4hk+6k+6h+3=p$
(2) $2(k-h)=4$ e $4k^2+4h^2+4hk+6k+6h+3=p^2$

Il primo caso si esclude in quanto $4k^2+4h^2+6k+4hk+6h+3$, uguale a p, è chiaramente sempre maggiore di $2(k-h)$, uguale a $4p$, da cui si avrebbe un assurdo.
Nel secondo caso, deve essere $k-h=2$, cioè $k=h+2$, da cui sostituendo

$$p^2=12h^2+36h+31$$

che diviso per 4 da resto 3, ma non ci sono quadrati che divisi per 4 diano resto 3.
Concludiamo dunque che non ci sono soluzioni $a,b,p \in \mathbb{N}$ con p primo.

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2022–2023

Prova di Fisica

(Corsi di Laurea in Fisica, Ingegneria e Matematica)

9 Settembre 2022

Non sono ammessi libri, calcolatrici, cellulari né altri apparecchi elettronici.
Si possono utilizzare solo fogli forniti dalla commissione che dovranno tutti essere consegnati, il presente testo compreso, al termine della prova.
Nessun foglio dovrà riportare un nome, una firma o alcun altro segno di riconoscimento, pena l'esclusione dal concorso.
L'aula della prova potrà essere abbandonata solo dopo un'ora dall'inizio della stessa.

Problema 1. Una barca può viaggiare a una velocità massima v rispetto all'acqua. Si vuole usare questa barca per attraversare un fiume la cui corrente ha una velocità v_c (uniforme su tutto il fiume). Si determini in che direzione si deve dirigere l'imbarcazione per percorrere la minor distanza. C'è differenza tra i casi $v > v_c$ e $v < v_c$?

Problema 2.

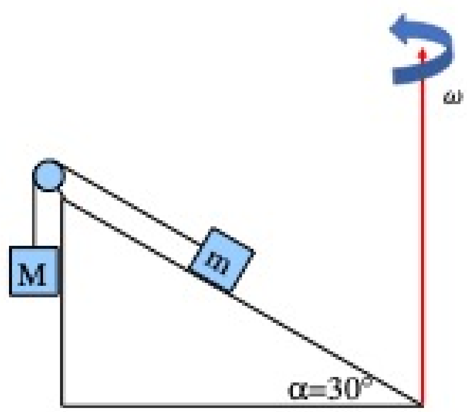


Figura 1

Le masse di figura 1 sono in equilibrio. Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ tra piano inclinato e massa m e la tensione T nella corda se $m = 100g$, $M = 50g$. Ripetere lo stesso calcolo nel caso in cui il piano inclinato ruoti intorno all'asse in figura con velocità angolare costante $\omega = 10 rad/s$. Si assuma per semplicità che la massa M non si può staccare dal piano inclinato.

Problema 3.
Si consideri una bicicletta di massa nulla schematizzata come in figura 2 costituita da un telaio e ruote di raggio r. Il ciclista, la cui massa è M, è seduto sul punto medio congiungente le due ruote a un'altezza h. A un certo punto il ciclista è costretto a frenare bruscamente cosicché nel momento in cui viene premuto il freno la ruota si blocca e striscia sul terreno. Assumendo un coefficiente d'attrito pari a μ, si determini la forza frenante nel caso in cui si freni con la ruota anteriore e la forza frenante nel caso in cui si freni con la ruota posteriore. Al variare di μ, c'è un valore massimo della forza frenante nel caso in cui si freni con la ruota posteriore? Frenando con la ruota anteriore si determini se la ruota posteriore può perdere contatto con il terreno.

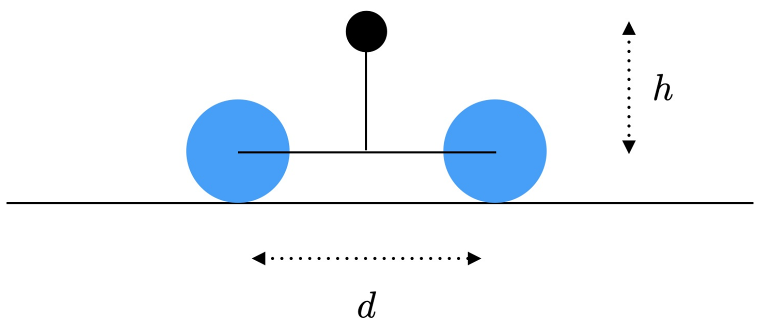


Figura 2

Problema 4.
Un'automobile è parcheggiata con una ruota su un marciapiede e le altre tre sulla strada. Assumendo che il marciapiede ha un'altezza h rispetto alla strada e che le sospensioni siano molle identiche di costante elastica k si determini lo spostamento dalla posizione di equilibrio di ognuna delle molle rispetto a quando l'automobile è parcheggiata sulla strada.

Problema 5.
Perché il cielo di notte è scuro? Si assuma che la densità di stelle nell'universo sia costante ρ e che ogni stella emetta in radiazione luminosa la stessa energia per unità di tempo P. Definendo l'intensità luminosa come l'energia misurata per unità di tempo e per unità di area si determini l'intensità luminosa misurata sulla terra (si trascuri l'intensità luminosa data dal sole). Il risultato dipende da ρ? Come cambierebbe il risultato se l'universo avesse un'età finita T? Assumendo che la densità di stelle sia dell'ordine di 10^{-3} stelle per anno luce cubico, che la potenza media di una stella sia dell'ordine di quella del sole $10^{26} W$ e che l'universo abbia un'età dell'ordine di 10 miliardi di anni si analizzi se l'assunzione di un'età finita dell'universo è sufficiente a spiegare perché la notte è buia.

Problema 6. Si consideri un recipiente cilindrico pieno d'acqua che ruota con velocità angolare ω rispetto al suo asse. Determinare la forma della superficie dell'acqua. [Suggerimento: lavorare nel riferimento rotante con il cilindro]

Scuola Superiore Meridionale

Concorso di Ammissione al I Anno del Corso Ordinario
A.A. 2022–2023

Prova di Fisica – Soluzioni

Problema 1. Una barca può viaggiare a una velocità massima v rispetto all'acqua. Si vuole usare questa barca per attraversare un fiume la cui corrente ha una velocità v_c (uniforme su tutto il fiume). Si determini in che direzione si deve dirigere l'imbarcazione per percorrere la minor distanza. C'è differenza tra i casi $v > v_c$ e $v < v_c$?

Soluzione. Consideriamo prima il caso in cui $v > v_c$. In questo caso la traiettoria che percorre la distanza minima è quella per cui la barca si muove perpendicolarmente alla riva. Per fare ciò la barca deve essere diretta in una direzione tale per cui la componente della velocità parallela alle rive del fiume deve esattamente compensare la velocità della corrente:

$$\cos\alpha = \frac{v_c}{v}\,.$$

Se $v < v_c$ la barca non può muoversi perpendicolarmente alla riva. Il problema può essere risolto graficamente sommando la velocità della corrente a tutte le possibili velocità dell'imbarcazione formando un cerchio sulla punta del vettore velocità della corrente. Il cammino più breve si ottiene massimizzando l'angolo della velocità dell'imbarcazione con la direzione della corrente. Questo corrisponde a prendere la tangente con il cerchio in figura 1. La direzione in cui va diretta l'imbarcazione è data dall'angolo α per cui:

$$\cos\alpha = \frac{v}{v_c}\,.$$

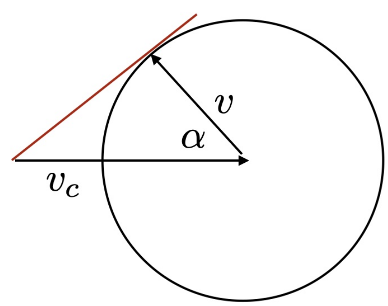


Figura 1

Problema 2.

Le masse di figura 2 sono in equilibrio. Determinare il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ tra piano inclinato e massa m e la tensione T nella corda se $m = 100g$, $M = 50g$. Ripetere lo stesso calcolo nel caso in cui il piano inclinato ruoti intorno all'asse in figura con velocità angolare costante $\omega = 10 rad/s$. Si assuma per semplicità che la massa M non si può staccare dal piano inclinato.

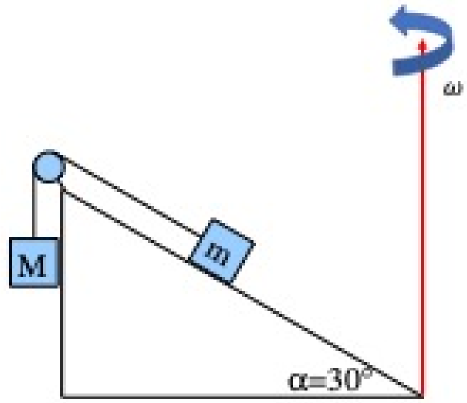


FIGURA 2

Soluzione. Scriviamo le equazioni della statica per entrambe le masse M e m, chiamando T la tensione del filo. Lungo l'asse y per la massa M abbiamo

$$T - Mg = 0.$$

Lungo il piano inclinato per la massa m abbiamo:

$$|T - mg\sin\alpha| \leq \mu mg\cos\alpha.$$

Il valore minimo di μ è allora:

$$\mu_{\min} = \frac{|\frac{M}{m} - \sin\alpha|}{\cos\alpha}.$$

Notare che il coefficiente di attrito minimo si annulla quando le masse sono in equilibrio statico.

Nel caso in cui il piano inclinato ruota dobbiamo aggiungere la forza centrifuga. L'equazione per la massa M è invariata. Per la massa m l'equazione viene modificata come:

$$|T - mg\sin\alpha + mg\omega^2 r\cos\alpha| \leq \mu(mg\cos\alpha + m\omega^2 r\sin\alpha).$$

dove r è la distanza della massa m dall'asse di rotazione. Il valore minimo del coefficiente d'attrito diventa:

$$\mu_{\min} = \frac{|\frac{M}{m} - \sin\alpha + \frac{\omega^2 r}{g}\cos\alpha|}{\cos\alpha + \frac{\omega^2 r}{g}\sin\alpha}$$

Problema 3.

Si consideri una bicicletta di massa nulla schematizzata come in figura 3 costituita da un telaio e ruote di raggio r. Il ciclista, la cui massa è M, è seduto sul punto medio congiungente le due ruote a un'altezza h. A un certo punto il ciclista è costretto a frenare bruscamente cosicché nel momento in cui viene premuto il freno la ruota si blocca e striscia sul terreno. Assumendo un coefficiente d'attrito pari a μ, si determini la forza frenante nel caso in cui si freni con la ruota anteriore e la forza frenante nel caso in cui si freni con la ruota posteriore. Al variare di μ, c'è un valore massimo della forza frenante nel caso in cui si freni con la ruota posteriore? Frenando con la ruota anteriore si determini se la ruota posteriore può perdere contatto con il terreno.

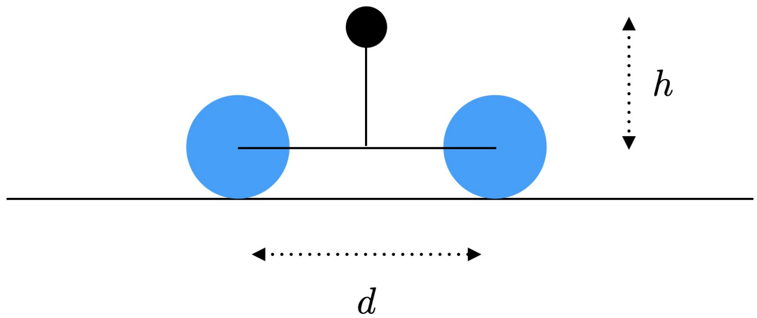


FIGURA 3

Soluzione. La somma dei momenti torcenti rispetto al centro di massa deve annullarsi. Siano F_1 e F_2 le reazioni vincolari della strada sulla ruota anteriore e posteriore rispettivamente. Queste allora banalmente soddisfano

$$F_1 + F_2 = Mg\,.$$

Imponendo che i momenti torcenti delle forze in gioco rispetto al centro di massa si annullino, se si frena con la ruota posteriore si ha

$$-F_1 d + F_2 d + \mu F_2 (h + r) = 0\,.$$

Risolvendo si ottiene la forza frenante:

$$F_a = \frac{dg\mu M}{2d + \mu(h + r)}\,.$$

Se μ tende all'infinito la forza frenante rimane finita $F_a \leq \frac{dgM}{h+r}$.
Se invece si frena con la ruota anteriore l'equazione da risolvere diventa:

$$-F_1 d + F_2 d + \mu F_1 (h + r) = 0\,.$$

Risolvendo otteniamo la forza frenante

$$F_a = \frac{dg\mu M}{2d - \mu(h + r)}\,.$$

Adesso la forza frenante non è più limitata. Attenzione però. L'espressione che abbiamo ricavato è valida se la ruota posteriore non si alza dal terreno per effetto della frenata. Questo accade se $F_2 = 0$ ossia

$$\frac{d}{2d - \mu(h + r)} = 1\,.$$

Segue che la forza frenante in questo caso è data da $F_a = \mu g M$ e non è limitata all'aumentare del coefficiente d'attrito μ, cosa che può essere ottenuta migliorando la qualità della gomma di cui è composta la ruota. Questo va confrontato con il caso in cui si frena con la ruota posteriore dove la forza massima frenante dipende solo dalla geometria della bicicletta e non dal coefficiente d'attrito.

Problema 4.
Un'automobile è parcheggiata con una ruota su un marciapiede e le altre tre sulla strada. Assumendo che il marciapiede ha un'altezza h rispetto alla strada e che le sospensioni siano

molle identiche di costante elastica k si determini lo spostamento dalla posizione di equilibrio di ognuna delle molle rispetto a quando l'automobile è parcheggiata sulla strada.

Soluzione. Misuriamo la compressione delle sospensioni rispetto alla posizione di equilibrio in cui tutte e quattro le ruote sono sulla strada. Il segno sarà positivo se la sospensione viene compressa maggiormente e negativo se la sospensione viene decompressa. All'equilibrio non ci possono essere momenti torcenti non-nulli rispetto a qualunque asse di rotazione. Prendendo come asse di rotazione dell'automobile una diagonale passante per due ruote possiamo concludere che le sospensioni delle due ruote rimanenti devono essere soggette a una compressione o decompressione identica. Se la ruota anteriore destra è sullo scalino allora la corrispondente sospensione sarà compressa di una quantità x. Per l'argomento appena descritto anche la sospensione posteriore sinistra dovrà essere compressa della stessa quantità. Ma questo significa che le sospensioni anteriore sinistra e posteriore destra si devono allungare della stessa quantità $-x$ affinché la somma di tutte le forze non cambi.

A questo punto l'automobile si alzerà rispetto al terreno di una quantità x in corrispondenza delle ruote anteriore sinistra e posteriore destra, mentre in corrispondenza della ruota posteriore sinistra l'automobile si abbasserà di x e sulla ruota anteriore destra l'automobile si alzerà di $h - x$, dove h è lo spessore dello scalino. Essendo la carrozzeria rigida possiamo calcolare di quanto si è alzato il punto centrale della carrozzeria in due modi che devono dare lo stesso risultato. Considerando la diagonale tra ruota anteriore sinistra e posteriore destra otteniamo che il punto medio si alza di x. Considerando invece la ruota anteriore destra e posteriore sinistra il punto centrale si alza di

$$\frac{(h-x)-x}{2}$$

Uguagliando queste due espressioni otteniamo

$$x = \frac{h}{4}$$

Si noti che il risultato non dipende dalla distribuzione dei pesi nell'automobile e pertanto è lo stesso anche se ci sono persone in auto.

Problema 5.

Perché il cielo di notte è scuro? Si assuma che la densità di stelle nell'universo sia costante ρ e che ogni stella emetta in radiazione luminosa la stessa energia per unità di tempo P. Definendo l'intensità luminosa come l'energia misurata per unità di tempo e per unità di area si determini l'intensità luminosa misurata sulla terra (si trascuri l'intensità luminosa data dal sole). Il risultato dipende da ρ? Come cambierebbe il risultato se l'universo avesse un'età finita T? Assumendo che la densità di stelle sia dell'ordine di 10^{-3} stelle per anno luce cubico, che la potenza media di una stella sia dell'ordine di quella del sole $10^{26}W$ e che l'universo abbia un'età dell'ordine di 10 miliardi di anni si analizzi se l'assunzione di un'età finita dell'universo è sufficiente a spiegare perché la notte è buia.

Soluzione. L'intensità luminosa di una stella a una distanza r diminuisce con il quadrato della distanza:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \, ,$$

dove abbiamo diviso per la superficie della sfera su cui è distribuita la potenza della stella a una distanza r. Considerando un riferimento in cui la terra è nel centro e dividendo l'universo

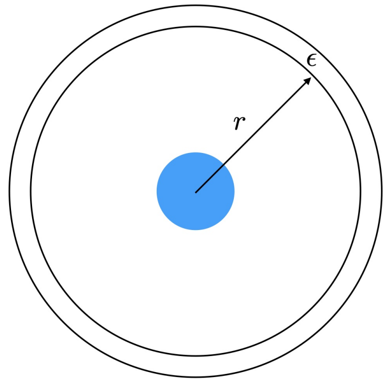


FIGURA 4

in sfere concentriche di spessore ϵ con centro sulla terra come in figura 4, il numero di stelle a una distanza r dalla terra sarà dato da

$$N = 4\pi r^2 \epsilon\rho$$

Ognuna di queste stelle produrrà un'intensità luminosa pari a $\frac{P}{4\pi r^2}$. L'intensità totale delle stelle a distanza r dalla terra sarà pertanto

$$I = P\epsilon\rho$$

e non dipende da r. Questo implica che sommando su tutti i cerchi concentrici otterremmo un'intensità di luce infinita in contraddizione con il senso comune per cui la notte è buia! Una possibile soluzione a questo problema è quella di assumere che l'universo abbia un'età finita T. In questo caso sulla terra arriverebbe la luce delle stelle al massimo a una distanza $r = Tc$ (con c la velocità della luce) e l'intensità luminosa di tutte le stelle visibili sarebbe:

$$I = P\rho T c\,.$$

Assumendo che tutte le stelle in media abbiano la stessa potenza del sole pari a $3.906 \cdot 10^{26} W$ e che la densità di stelle sia pari a 10^{-3} stelle per anno luce cubico possiamo stimare la luminosità del cielo sulla terra come

$$I \sim N 10^{-9} W/m^2\,,$$

con N l'età dell'universo in anni. Se l'universo ha un'età dell'ordine di dieci miliardi di anni la notte dovrebbe avere un'intensità luminosa di

$$I = 10 W/m^2\,,$$

pari all'intensità luminosa di una lampadina da $100W$ a 1 m di distanza. Questo valore è però vari ordini di grandezza più alto rispetto a quello misurato. Pertanto un'età finita dell'universo non sembra, con i dati inseriti, sufficiente per spiegare perché la notte è buia!

Problema 6. Si consideri un recipiente cilindrico pieno d'acqua che ruota con velocità angolare ω rispetto al suo asse. Determinare la forma della superficie dell'acqua. [Suggerimento: lavorare nel riferimento rotante con il cilindro]

Soluzione. È conveniente usare il teorema di Bernoulli nel riferimento rotante in cui l'acqua è ferma. Infatti in questo riferimento il fluido è in quiete e possiamo usare il teorema di

Bernoulli lungo una qualunque linea che congiunge due punti arbitrari. Considerando che $v = 0$ nel riferimento rotante, il teorema di Bernoulli afferma che lungo tale linea

$$P(r, z) + \rho V(r, z) = cost$$

dove $V(r, z)$ è il potenziale a cui è soggetto l'elemento fluido con r la distanza dall'asse del cilindro, z l'altezza e P la pressione. Sulla superficie di separazione tra aria e liquido la pressione deve essere costante e uguale alla pressione atmosferica P_a. Il potenziale è invece dato dalla somma del potenziale gravitazionale e del potenziale centrifugo:

$$V(r, z) = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \,.$$

Si ottiene pertanto l'equazione della superficie formata dall'acqua:

$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \,,$$

che è una parabola. La costante z_0 si può determinare conoscendo il volume dell'acqua nel secchio.